判別式は不要だ

高校の数学に“判別式”という言葉が入ってきたのはいったいいつ頃のことだったのだろうか．わたしが高校生であった３０年ほど前にはすでにこの言葉が数学の重要な概念であるかのようにのさばっていた．高校で教えられている数学には“間違ったこと”がたくさんあるのだが，“判別式”はそれが流布されている広さと，学生達にあたえる害毒の大きさにおいて代表選手といってもいい．

２次方程式

なにごとも具体的なほうが話がわかりやすい．例として次の問題を考えよう．

例題１． x についての２次方程式

$$x^2+2(k-2)x+k=0$$

が実数解をもつような実数kの範囲は

$$k \leqq \boxed{\text{ア}} \quad \text{または} k \leqq \boxed{\text{イ}}$$

である．

さらに，その解がいずれも-1以下であるようなkの範囲は

$$\boxed{\text{ウエ}} \leqq k \leqq \boxed{\text{エ}}$$

である．

／′**84**　共通１次・追試

このような問題を高校生に実際解いてもらうと，最初の問いに対してほとんどの人が次のように解答する．

実数解をもつ条件は

$$D/4=(k-2)^2-k \geqq 0$$

$$\therefore \quad k^2-5k+4 \geqq 0$$

$$\therefore \quad (k-1)(k-4) \geqq 0$$

よって，

$$\boldsymbol{k \leqq 1} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{4 \leqq k}$$

このような解答が数学的に不備だといっているのではない．これはこれで完璧に正しい．ただ恐ろしいのはこのような解答を書く学生のほぼ全員が，“ではなぜ判別式が正か0なのか？”というう質問に答えられないことだ．そしてそのような問いを自分自身にしてみようともしないことだ．ただ，反射的に素早く

２次方程式が実数解をもつ　$\rightleftarrows$　判別式 $\geqq 0$

と答えるのが数学ができるようになるとことだとなんとなく思っているのである．さらに悪いことに，最近の高校の定期考査は退屈な問題を多量に羅列し，実際“反射的に素早く”という戦略が功を奏するように作られていることが多いのだ．しかしこの戦略は，ちょっと高級な問題を相手にするときほとんど役に立たない．

問題にもどろう．判別式は２次方程式の基本ではない．２次方程式の基本は“平方完成”という考え方にある．たとえば２次方程式といっても

$$x^2=9 \qquad \cdots\cdots①$$

には何の難しさもない．だれでも$x=3$と答える．負の数を知っているものなら，さらに$x=-3$も解としてつけ加える．ところが

$$x^2-4x-5=0 \qquad \cdots\cdots②$$

となると問題は急激に難しくなる．方程式は，ある未知の数があって，その２乗と４倍の差が5だといっている．この未知の数を求めなければならない．ほんとうに自力でこれを考え通すには相当な知力が必要といっていい．

この方程式①と②の違いは，一言でいえば未知数の散らばりの度合いである．①では未知数が１ヶ所しかないが，②では未知数が２ヶ所に散らばっているのである．ただこれだけのことが問題を桁違いに難しくしているのだ．これは２次方程式に限った話ではない．１次方程式でも

$$3x-5=1$$

なら，$3x$ は5を引けば1に一致するのだから6のはずで，x は3倍して6に等しくなるのだから

$$x=2$$

というわけで，とても易しい．ところが

$$3x-5=x-1$$

となるともう上のようには行かない．こんなもの易しいと思っているひとは無意識に“移項”という技術のお世話になっているからで，移項によって，未知数の散らばりをなくしているのである．

ところが２次方程式はすでに．この“移項”という技術の埒外にある．これが，大げさにいえば２次方程式の困難さなのだ．ところが，幸いにこの問題はすでに大昔に“平方完成”という技術によって解決済みで，次のようにやる．

まず，恒等的に成り立つ

$$\{x+(k-2)\}^2=x^2+2(k-2)x+(k-2)^2$$

の右辺と，もとの２次方程式

$$x^2+2(k-2)x+k=0$$

の左辺が似ていることに注意すれば，これを調整して

$$x^2+2(k-2)x+k=\{x+(k-2)\}^2-k^2+5k-4$$

と書き直すのになんの困難もない．こうして，

$$x^2+2(k-2)x+k=0$$
$$\rightleftarrows \{x+(k-2)\}^2=k^2-5k+4$$

がえられるが，この最後の方程式では未知数の散らばりがまったくない．つまり，$x+(k-2)$という未知な数があるのだが，それは２乗するとk^2-5k+4になるような数だといっているわけだ．いってしまえばコロンブスの玉子だが，こんなことを自力で考え出したひとの数学力は並大抵のものではない．

ところで，この方程式の右辺k^2-5k+4が負の数なら，$x+(k-2)$は実数でありえない．実数なら２乗すれば必ず正か0にあるからである．こうして，問題の２次方程式が実数解をもつ条件は

$$k^2-5k+4 \geqq 0 \quad \rightleftarrows k \leqq 1 \text{ または } 4 \leqq k$$

となる．

“判別式 ≧ 0”とひとことでいえばえられる結果を，ずいぶんと長々と説明してやっと手にしたように見えるかも知れない．しかし，そうではないことは実際に解答を書いてみればわかる．

［解答］ $x^2+2(k-2)x+k=0$

$$\rightleftarrows (x+k-2)^2=k^2-5k+4$$

が実数解をもつ条件は

$$k^2-5k+4 \geqq 0 \quad \rightleftarrows (k-1)(k-4) \geqq 0$$
$$\rightleftarrows \boldsymbol{k \leqq 1} \textbf{ または } \boldsymbol{4 \leqq k}$$

で，このとき方程式の解は

$$x+k-2=\pm\sqrt{k^2-5k+4}$$
$$\rightleftarrows x=-k+2\pm\sqrt{k^2-5k+4}$$

これらがいずれも-1以下となる条件は，この２解の大きい方について

$$-k+2+\sqrt{k^2-5k+4} \leqq -1$$
$$\rightleftarrows \sqrt{k^2-5k+4} \leqq k-3$$
$$\rightleftarrows k^2-5k+4 \leqq (k-3)^2 \quad \rightleftarrows k \leqq 5$$

が成り立つことであって，求めるkの値の範囲は

$$\boldsymbol{4 \leqq k \leqq 5}$$ □

しかし，大切なことは解答の長短ではなく，ある分野の**公式はそれを導く過程に典型的で学ぶべきことが多い**もので，結果としての**公式は搾り滓**である，とういう事実に気付くことである．いまの場合，“判別式 ≧ 0”という結果は，**“平方完成”によって散らばっている未知数を１ヶ所に集める**という，実り多い考え方の残滓にすぎないのだ．

実際，散らばったものを１ヶ所に集めるという式変形の方向性は，平方完成にとどまらず有効である．例えば分数関数

$$f(x)=\frac{x}{x+1} \quad (x>0)$$

は，xが分母と分子に散らばっているためxが増えるとき全体として増えるのか，減るのかわかりづらい．しかし，

$$f(x)=\frac{x}{x+1}=\frac{(x+1)-1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$$

と式変形すれば，xが増えるとき$\frac{1}{x+1}$は減るから全体として$f(x)$は増えるとわかってしまう．つまり，散らばったものを１ヶ所に集めたいという方向性は２次関数という範囲をこえて普遍的に有効なのである．

２次関数

判別式が顔をだすのは２次方程式の問題に限られているわけではない．まず次の例題を見ていただきたい．

例題２． $f(x)=x^2+2ax-3a$について，次の各設問に答えよ．

(1)　$a=1$のとき，方程式$f(x)=0$を解け．

(2)　任意の実数xについて，$f(x)>0$となるようなaの値の範囲を求めよ．

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$の任意のxに対して，$f(x)>0$となるようにaの値の範囲を求めよ．

／’84　順天堂大・体育

(1)はなんの問題もないが(2)では以下のような答案を今でも目にすることがある．

任意のxについて$f(x)>0$となる条件は

$$D/4=a^2+3a<0$$
$$\therefore \quad a(a+3)<0$$

よって，

$$\boldsymbol{-3<a<0}$$

わたしが高校生のときも，次の形の定理として習った記憶がある．

２次関数が常に定符号であるための条件は
判別式＜0

そして，このような問題にめぐりあうごとに，納得するために，グラフを思い浮かべ

２次関数が定符号
$\rightleftarrows$ 対応する２次方程式が虚数解をもつ
$\rightleftarrows$ 判別式＜0

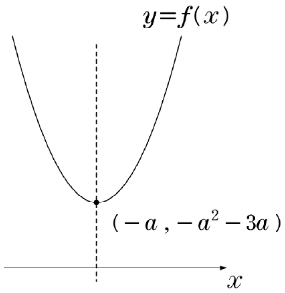
といういいかえを強いられていたことを思い出す．

しかし，どうせ２次関数でグラフを思い浮かべるのなら，その頂点の座標を計算するはずで

$$f(x)=x^2+2ax-3a=(x+a)^2-a^2-3a$$

と平方完成を行うはずだ．
そして，グラフを描いてみれば，

任意の x について $f(x)>0$
$\rightleftarrows$ $y=f(x)$ のグラフの頂点の y 座標＞0



がひとりでに理解される．“判別式＜0”という条件がこの“頂点の y 座標＞0”のいいかえであることに気付いたときほど馬鹿馬鹿しい思いをしたことはない．こんなに目で見ても明らかなことを，なぜ難しくいいかえていたのか．“頂点の y 座標＞0”には視覚的イメージがともなうのに“判別式＜0”にはイメージが何もないのである．

こんなことを本気で教えている人がいるということも不思議といえば不思議なのだが，迷惑なのは，かってのわたしのようにそれをまともに受け取る生徒のほうである．

問題にもどろう．われわれはさきほど

$$f(x)=x^2+2ax-3a=(x+a)^2-a^2-3a$$

という“平方完成”を行ったが，それはなんのためであったのか？もとの

$$f(x)=x^2+2ax-3a$$

の形の２次関数は，動く x が２ヶ所に散らばっているために，例えば x が増えたときに $f(x)$ が増えるのか減るのか，そのあたりが不明である．しかし，“平方完成”した

$$f(x)=(x+a)^2-a^2-3a$$

の形では，この式で動くものは $(x+a)^2$ だけになっている．このおかげで $f(x)$ は $(x+a)^2$ が大きくなるほど大きく．小さいほど小さいということが読みとれる．こうして，$x=-a$ とすることで $(x+a)^2\ (\geqq 0)$ の値を最も小さくできて，そこが $y=f(x)$ のグラフの頂点であることがわかったのである．

判別式は⑵のような問いに対してはもっと分が悪い．この方法ではこの問いには答えられないのだ．しかし，“平方完成”を基本におく解法では，まったく同じ方針のもとで問題に対処できる．キーとなるのは

任意の x について $f(x)>0$
$\rightleftarrows$ $f(x)$ の最小値＞0
（みんなが正 $\rightleftarrows$ 一番小さい人でも正）

たったこれだけのいいかえである．

“平方完成”と上のいいかえとを組み合わせ，これに起こっていることを数直線上で分析する仕方を学べば（以下の解答で行われる），この手の問題に対する強力な解法を手にすることができる．では解答を書いてみよう．

［解答］ ⑴ $a=1$ のとき

$$f(x)=0 \Leftrightarrow\!\!\!\!/\ \rightleftarrows x^2+2x-3=0$$
$$(x+1)^2=4 \rightleftarrows x+1=\pm 2$$
$$\rightleftarrows \boldsymbol{x=1} \text{ **または** } \boldsymbol{x=-3}$$

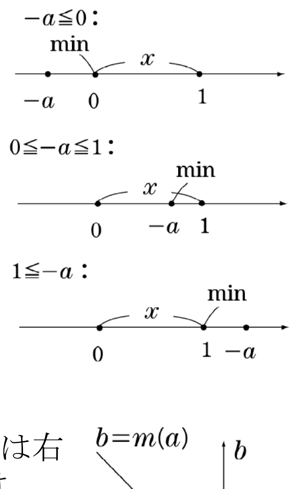
⑵ $f(x)=(x+a)^2-a^2-3a$ により

$$f(x) \text{ の最小値}=-a^2-3a$$

よって，

任意の x について $f(x)>0$
$$\rightleftarrows f(x) \text{ の最小値}>0 \rightleftarrows -a^2-3a>0$$
$$\rightleftarrows a(a+3)<0 \rightleftarrows \boldsymbol{-3<a<1}$$

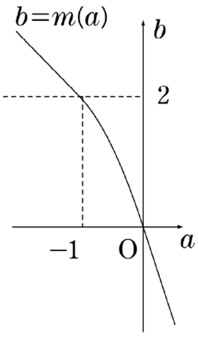
⑶ $f(x)=(x+a)^2-a^2-3a$ から，x が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲を動くとき，数直線上で点 x が点 $-a$ に近いほど $f(x)$ の値は小さい．したがって，$f(x)$ の最小値を $m(a)$ とすれば，右図とから



$$m(a)=\begin{cases} f(0) & (-a\leqq 0) \\ f(-a) & (0\leqq -a\leqq 1) \\ f(1) & (1\leqq -a) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -3a & (0\leqq a) \\ -a^2-3a & (-1\leqq a\leqq 0) \\ 1-a & (a\leqq -1) \end{cases}$$

よって，$b=m(a)$ のグラフは右図で，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a\leqq 0} \qquad \square$$



はやく，すべての高校生が“判別式”の呪縛から逃れられることを願っている．

宮崎　天平