ベクトルは意外なときに役に立つ……(1)

われわれが例えばベクトルを勉強するとき，市販の問題集のベクトルという節を開くことになる．するとそこには，$\vec{a}$ ，$\vec{b}$ とか $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とか $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ といった記号があふれている．そしてこんどは逆に，こういった記号が問題文中にあれば，“ベクトルの問題だ”と判断する習慣がついてくる．これはこれでかまわないのだが，ベクトルは数学の問題をとくときの道具という側面があり，ベクトルそのものを題材としたいわゆる“ベクトルのベクトルによるベクトルのための問題”にだけ有効なわけではない．さまざまな場面で的確にベクトルを用いて，答案をビシッときめたいものだ．

ここでは，最近目にした問題を例に，そのようなベクトルの用い方の一例を見ていただこう．

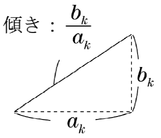
［例題］　$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ および $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ をすべて正の実数とする．もし $\dfrac{b_1}{a_1} < \dfrac{b_2}{a_2} < \cdots\cdots < \dfrac{b_n}{a_n}$ ならば，

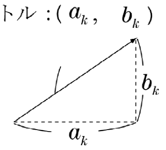
$$\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_1+b_2}{a_1+a_2} < \frac{b_1+b_2+b_3}{a_1+a_2+a_3} < \cdots\cdots < \frac{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n} < \frac{b_n}{a_n}$$

が成立していることを示せ．

／’97　東京女子医大

問題文中の $\dfrac{b_k}{a_k}$ という表式を見ると，わたしたちは右図のような線分の傾きを連想するくせがある．しかし，たとえば傾き $\dfrac{b_1}{a_1}, \dfrac{b_2}{a_2}$ と傾き $\dfrac{b_1+b_2}{a_1+a_2}$ の関係については，“傾き”という概念だけではどうにもならない．“傾き”には和が定義されていないからである．そこで，傾き $\dfrac{b_k}{a_k}$ の代わりにベクトル (a_k, b_k) を考えることにすれば，こちらには和が定義されているので，





“$\dfrac{b_1}{a_1}, \dfrac{b_2}{a_2}$ はそれぞれベクトル $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ の傾きで，$\dfrac{b_1+b_2}{a_1+a_2}$ は和のベクトル $(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2)$ の傾き”と解釈することで，問題文全体をベクトルのことばで翻訳することができるわけだ．

たとえば，

$$\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < \cdots\cdots < \frac{b_n}{a_n}$$

は，ベクトル (a_k, b_k) の傾きは k が大きいほど大きい，と翻訳されるし

$$\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_1+b_2}{a_1+a_2} < \frac{b_1+b_2+b_3}{a_1+a_2+a_3} < \cdots\cdots < \frac{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n} < \frac{b_n}{a_n}$$

は，

ベクトル (a_1, b_1) の傾き $<$ ベクトル $(a_1, b_1)+(a_2, b_2)$ の傾き
$< (a_1, b_1)+(a_2, b_2)+(a_3, b_3)$ の傾き
$< \cdots\cdots < (a_1, b_1)+(a_2, b_2)+\cdots\cdots+(a_n, b_n)$ の傾き
$< (a_n, b_n)$ の傾き

といった具合だ．

では，**解答**を書いてみよう．

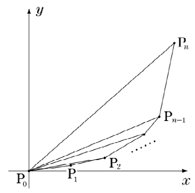
［解答］　座標平面上の点列 P_k $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$ を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{OP}_k}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_{k-1}}+\begin{pmatrix}a_k\\b_k\end{pmatrix} \quad (k=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

で定めるとすれば，$\dfrac{b_1}{a_1} < \dfrac{b_2}{a_2} < \cdots\cdots < \dfrac{b_n}{a_n}$ により，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\begin{pmatrix}a_k\\b_k\end{pmatrix} \quad (k=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

の傾きは k が増えると増加する．したがって，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\cdots\cdots\mathrm{P}_n$ は下に凸な折れ線で，図から



$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ の傾き $<$ $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2$ の傾き $<$ $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_3$ の傾き
$< \cdots\cdots <$ $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_n$ の傾き $<$ $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ の傾き

よって，

$$\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_1+b_2}{a_1+a_2} < \frac{b_1+b_2+b_3}{a_1+a_2+a_3} < \cdots\cdots < \frac{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n} < \frac{b_n}{a_n}$$

□

ざっとこんな具合だが，“意外な場所で役立つベクトル”の例はほかにも，座標平面に，微積分に，連立方程式の解法に，確率に，と枚挙にいとまがない．この場所をかりてぼちぼち紹介していきたいと思っている．

宮崎　天平